

اتحاد جمله مشترک

به نام خدا

در این جلسه می‌فوایم درباره‌ی اتحاد دیگه با هم صحبت کنیم، "اتحاد جمله مشترک" چرا به این اتحاد میگن اتحاد جمله مشترک؟

چون جمله اول دو تا پیرانتزی که می‌فوایم در هم ضرب کنیم با هم برابره، مثال:

$$(x + 5)(x + 3) =$$

اولین جمله هر دو پیرانتز x هست. حالا این اتحاد به چه صورته؟

اگه بفوایم به زبون ساده بگیم، صورت کلی اتحاد جمله مشترک به صورت زیره:

$$= (\text{جمله دو} + \text{جمله مشترک}) (\text{جمله اول} + \text{جمله مشترک})$$

پس اگه دو تا پیرانتز در هم ضرب شده بودن و جمله اول دو تا پیرانتز با هم برابر بود می‌تونیم از اتحاد جمله مشترک استفاده کنیم:

$$(\text{جمله اول} \times \text{جمله دو}) + (\text{جمله مشترک}) (\text{جمله اول} + \text{جمله دو}) + \text{جمله مشترک}^2$$

یعنی برای حل این اتحاد چکار می‌کنیم؟

جمله مشترک رو به توان ۲ می‌رسونیم

جمله اول و دو رو با هم جمع می‌کنیم و در جمله مشترک ضرب می‌کنیم

جمله اول و دو رو در هم ضرب می‌کنیم

و بعد اینا رو با هم جمع می‌کنیم.
حالا همون مثالی که گفته بودیم رو با هم حل می‌کنیم:

$$(x + 5)(x + 3) =$$

جمله مشترک چیه؟ x

جمله اول چیه؟ 5

جمله دوم چیه؟ 3

جمله مشترک رو به توان 2 می‌رسونیم؛ x^2

جمله اول و دوم رو با هم جمع می‌کنیم و در جمله مشترک ضرب می‌کنیم

$$(5 + 3)x = 8x$$

جملات اول و دوم رو در هم ضرب می‌کنیم:

$$5 \times 3 = 15$$

حالا همه اینا رو با هم جمع می‌کنیم:

$$x^2 + 8x + 15$$

یه مثال دیگه:

$$(5x + 4)(5x + 3) =$$

جمله مشترک چیه؟ $5x$

جمله اول چیه؟ 4

جمله دوم چیه؟ 3

جمله مشترک رو به توان ۲ می‌رسونیم: $(5x)^2 = 25x^2$

جمله اول و دوم رو با هم جمع می‌کنیم و در جمله مشترک ضرب می‌کنیم

$$(4 + 3)(5x) = 7(5x) = 35x$$

جملات اول و دوم رو در هم ضرب می‌کنیم:

$$4 \times 3 = 12$$

حالا همه اینا رو با هم جمع می‌کنیم:

$$25x^2 + 35x + 12$$

مثال بعد:

$$(x + a)(x - b) =$$

جمله مشترک چیه؟ x

جمله اول چیه؟ a

جمله دوم چیه؟ $-b$ (توجه کنید که علامت رو باید در نظر بگیرید)

جمله مشترک رو به توان ۲ می‌رسونیم: x^2

جمله اول و دوم رو با هم جمع می‌کنیم و در جمله مشترک ضرب می‌کنیم

$$(a - b)x$$

جملات اول و دوم رو در هم ضرب می‌کنیم:

$$a(-b) = -ab$$

حالا همه اینا رو با هم جمع می‌کنیم:

$$x^2 + (a - b)x - ab$$

مثال بعد:

$$(3x - 2)(3x - 5) =$$

جمله مشترک $3x$ ؟

جمله اول -2 ؟

جمله دوم -5 ؟

جمله مشترک رو به توان ۲ می‌رسونیم: $(3x)^2 = 9x^2$

جمله اول و دوم رو با هم جمع می‌کنیم و در جمله مشترک ضرب می‌کنیم

$$(-2 - 5)(3x) = -7(3x) = -21x$$

جملات اول و دوم رو در هم ضرب می‌کنیم:

$$(-2) \times (-5) = 10$$

حالا همه اینا رو با هم جمع می‌کنیم:

$$9x^2 - 21x + 10$$

تجزیه با کمک اتحاد جمله
مشترک

تا اینجا ما یاد گرفتیم که طرف دوم اتحاد جمله مشترک رو بنویسیم. حالا می‌فوایم با توجه به این اتحاد، تجزیه انجام بدیم. مشابه کاری که برای اتحاد مربع و اتحاد مزدوج انجام دادیم.

برای تجزیه با استفاده از اتحاد جمله مشترک دو حالت رو باید بررسی کنیم:

حالت الف: زمانی که ضریب x^2 برابر ۱ هست.

حالت ب: زمانی که ضریب x^2 عددی غیر از ۱ هست.

ما در اینجا حالت الف رو بررسی می‌کنیم:

فرض کنید عبارت زیر رو برای تجزیه به ما دادن:

$$x^2 + 6x + 8$$

ما می‌فوییم این عبارت رو به صورت حاصلضرب دو تا پرانتز بنویسیم، طرف دوم اتحاد جمله مشترک به چه صورت بود؟

$$\text{جمله اول} \times \text{جمله دوم} + \text{جمله مشترک} (\text{جمله اول} + \text{جمله دوم}) + \text{جمله مشترک}^2$$

در واقع ما می‌فوییم با استفاده از طرف دوم اتحاد، طرف اول رو بنویسیم:

با توجه به قالب کلی که برای اتحاد جمله مشترک داریم، گامهای زیر رو انجام میدیم:

گام ۱. دو تا پرانتز می‌نویسیم و جمله اول هر دو پرانتز رو x میذاریم (در واقع همون جمله ای که به توان ۲ رسیده، که در اینجا x هست):

$$(x \dots)(x \dots)$$

گام ۲. حالا باید دو تا عدد پیدا کنیم که این خصوصیات رو داشته باشن:

جمعشون برابر ضریب x بشه (یعنی برابر ۶)

ضربشون برابر عدد تنها بشه (یعنی برابر ۸).

برای اینکه اعدادی با این خصوصیات پیدا کنیم اول از قسمت ضرب شروع می‌کنیم،

یعنی اول به دنبال عددهایی میگردیم که ضربشون ۸ بشه:

چه عددایی ضربشون ۸ میشه؟

۱ و ۸

۲ و ۴

دیگه غیر از این دو تا، نمی تونیم عددهای دیگه ای پیدا کنیم که ضربشون برابر ۸ بشه. حالا باید ببینیم بین این دو جفت عدد، جمع کدوم برابر ۶ میشه؟ ۴ و ۲ پس دو تا عددمون رو پیدا کردیم.

گام ۳. دو تا عدد به دست اومده رو داخل دو تا پرانتز می نویسیم:

$$(x + 2)(x + 4)$$

مثال بعد:

$$x^2 - 13x + 36$$

گام ۱. دو تا پرانتز می نویسیم و جمله اول هر دو پرانتز رو x میذاریم:

$$(x \dots)(x \dots)$$

گام ۲. حالا باید دو تا عدد پیدا کنیم که این خصوصیات رو داشته باشن:

جمعشون برابر ضریب x بشه (یعنی برابر -13)

ضربشون برابر عدد تنها بشه (یعنی برابر 36).

یه نکته مهم رو اینجا باید دقت کنید، دو تا عدد می فوایم که جمعشون بشه -13 و

ضربشون بشه 36 . علامت این دو تا عدد باید به چه صورت باشه؟

چون ضرب این دو عدد مثبت شده، نتیجه می‌گیریم که این اعداد یا هر دو مثبت بودن یا هر دو منفی.

اگر هر دو مثبت باشند، جمعشون هم قطعا مثبت میشه ولی اینجا جمعشون منفی شده، بنابراین نتیجه می‌گیریم که دو عدد منفی هستن.

چه عددایی ضربشون ۳۶ میشه؟ (توجه داشته باشید که هر دو عدد باید منفی باشند)

۱- و -۳۶

۲- و -۱۸

۳- و -۱۲

۴- و -۹

۶- و -۶

دیگه نمی‌تونیم دو تا عدد پیدا کنیم که ضربشون برابر ۳۶ بشه. حالا باید ببینیم بین این جفت عدد، جمع کدوم برابر ۱۳- میشه؟ ۴- و ۹-

پس دو تا عددمون رو پیدا کردیم.

گام ۳. دو تا عدد به دست اومده رو داخل دو تا پرانتز می‌نویسیم:

$$(x - 4)(x - 9)$$

مثال بعد:

$$x^2 - 8x + 15$$

گام ۱. دو تا پرانتز می‌نویسیم و جمله اول هر دو پرانتز رو X می‌ذاریم:

$$(x \dots)(x \dots)$$

گام ۲. حالا باید دو تا عدد پیدا کنیم که این خصوصیات رو داشته باشن:

جمعشون برابر ضرب X بشه (یعنی برابر -۸)

ضربشون برابر عدد تنها بشه (یعنی برابر ۱۵).

دو تا عدد می‌فوییم که جمعشون بشه -۸ و ضربشون بشه ۱۵ . علامت این دو تا عدد باید به چه صورت باشه؟

چون ضرب این دو عدد مثبت شده، نتیجه می‌گیریم که این اعداد یا هر دو مثبت بودن یا هر دو منفی.

اگه هر دو عدد مثبت باشن، جمعشون هم قطعاً مثبت میشه، ولی اینجا جمعشون منفی شده، بنابراین نتیجه می‌گیریم که دو عدد منفی هستن.

چه عددایی ضربشون ۱۵ میشه؟ (توجه داشته باشید که هر دو عدد باید منفی باشن)

$$-۱ \text{ و } -۱۵$$

$$-۳ \text{ و } -۵$$

دیگه نمی‌تونیم دو تا عدد پیدا کنیم که ضربشون برابر ۱۵ بشه. حالا باید ببینیم بین این جفت عدد، جمع کدوم برابر -۸ میشه؟ -۳ و -۵

پس دو تا عددمون رو پیدا کردیم.

گام ۳. دو تا عدد به دست اومده رو داخل دو تا پرانتز می‌نویسیم:

$$(x - 5)(x - 3)$$

مثال بعد:

$$x^2 - 7x - 18$$

گام ۱. دو تا پرانتز می‌نویسیم و جمله اول هر دو پرانتز رو x میذاریم:

$$(x \dots)(x \dots)$$

گام ۲. حالا باید دو تا عدد پیدا کنیم که این خصوصیات رو داشته باشن:

جمعشون برابر ضریب x بشه (یعنی برابر -7)

ضربشون برابر عدد تنها بشه (یعنی برابر -18).

دو تا عدد می‌فوییم که جمعشون بشه -7 و ضربشون بشه -18 . علامت این دو تا عدد باید به چه صورت باشه؟

چون ضرب این دو عدد منفی شده، نتیجه می‌گیریم که یکی از این اعداد مثبت بوده و

یکی منفی

چون جمع این دو عدد منفی شده، نتیجه می‌گیریم که عدد بزرگتر منفی بوده

چه عددایی ضربشون -18 میشه؟ (توجه داشته باشید که علامت عدد بزرگتر باید منفی باشه)

$$+1 \text{ و } -18$$

$$+2 \text{ و } -9$$

$$+3 \text{ و } -6$$

دیگه نمی‌تونیم دو تا عدد پیدا کنیم که ضربشون برابر -18 بشه.

حالا باید ببینیم بین این جفت عددها، جمع کدوم جفت برابر -7 میشه؟ $+2$ و -9

پس دو تا عددمون رو پیدا کردیم.

گام ۳. دو تا عدد به دست اومده رو داخل دو تا پرانتز می نویسیم:

$$(x - 9)(x + 2)$$

مثال بعد:

$$x^2 + 6x - 27$$

گام ۱. دو تا پرانتز می نویسیم و جمله اول هر دو پرانتز رو X میذاریم:

$$(x \dots)(x \dots)$$

گام ۲. حالا باید دو تا عدد پیدا کنیم که این خصوصیات رو داشته باشن:

جمعشون برابر ضرب X بشه (یعنی برابر ۶)

ضربشون برابر عدد تنها بشه (یعنی برابر -27).

دو تا عدد می فوایم که جمعشون بشه ۶ و ضربشون بشه -27 . علامت این دو تا عدد باید به چه صورت باشه؟

چون ضرب این دو عدد منفی شده، نتیجه می گیریم که یکی از این اعداد مثبت بوده و

یکی منفی

چون جمع این دو عدد مثبت شده، نتیجه می گیریم که عدد بزرگتر مثبت بوده

چه عددایی ضربشون -27 میشه؟ (توجه داشته باشید که علامت عدد بزرگتر باید مثبت باشه)

$$+27 \text{ و } -1$$

$$+9 \text{ و } -3$$

دیگه نمی‌تونیم دو تا عدد پیدا کنیم که ضربشون برابر -27 بشه. حالا باید ببینیم بین این هفت عدد، جمع کدوم برابر $+6$ میشه؟ $+9$ و -3 پس دو تا عددمون رو پیدا کردیم.

گام ۳. دو تا عدد به دست اومده رو داخل دو تا پرانتز می‌نویسیم:

$$(x - 3)(x + 9)$$

می‌تونید از جدول زیر برای مشخص کردن علامتها استفاده کنید، ولی چون مشابه تحلیل‌هایی که انجام دادیم می‌تونیم علامتها رو به دست بیاریم، توصیه نمی‌کنم که این جدول رو حفظ کنید.

علامت عدد کوچکتر	علامت عدد بزرگتر		علامت عدد تنها	علامت ضریب X
+	+		+	+
-	-		+	-
+	+		-	+
-	-		+	-

مثلا برای مثال قبل:

$$x^2 + 6x - 27$$

علامت عدد تنها، منفی و علامت ضریب X مثبت، بنابراین با استفاده از سطر سوم این جدول می‌فهمیم:

دو تا عددی که در هم ضرب شدن، علامتهاشون مخالف همدیگه‌س و علامت عدد بزرگتر هم مثبته.

حل تمرین صفحه ۱۹

اتحاد و تجزیه

۱- حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) $(\frac{1}{4} - x)(\frac{1}{4} + x)$

د) $(3x+y-z)(3x+y+z)$

ب) $(5x+4)(5x+3)$

ه) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$

ج) $(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})$

و) $(x-2)(x+2)(x^2+3)$

قسمت‌های "ب" و "و" رو در این جا حل می‌کنیم. سایر قسمتها که مربوط به اتحاد مزدوج هستن در جلسه گذشته حل شدن.

ب: اتحاد جمله مشترکه، حاصل برابر میشه با:

$$(5x + 4)(5x + 3) = (5x)^2 + (4 + 3)(5x) + (4 \times 3) = 25x^2 + 35x + 12$$

و: دو تا پرانتز اول اتحاد مزدوج رو تشکیل میدن:

$$(x - 2)(x + 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$

این مقدار رو جاگذاری می‌کنیم:

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 3) = (x^2 - 4)(x^2 + 3)$$

حالا اتحاد جمله مشترک به وجود اومد، بنابراین:

$$(x^2 - 4)(x^2 + 3) = (x^2)^2 + (-4 + 3)x^2 + (-4)(+3) = x^4 - x^2 - 12$$

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam9

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.